Bestimmung der Gasdichte mit dem Effusiometer

Stichworte: Bernoullische Gleichung, statistische Auswerteverfahren, Reynoldsche Zahl, laminare und turbulente Strömung, Kontinuitätsgleichung

1 Einführung und Themenstellung

Die Ausströmgeschwindigkeit eines Gases aus einer kleinen Öffnung ist abhängig von der Gasdichte und damit letztlich abhängig von der Masse der Gasmoleküle. Aufgrund dieser Abhängigkeit wird im Versuch die Dichte von Gasen (CO_2 und Ar) relativ zur Dichte von Luft bestimmt. Die Messanordnung wird als **Effusiometer** bezeichnet. Man misst die Zeiten, in denen ein bestimmtes Volumen Gas bzw. Luft bei geringem Überdruck durch eine enge Düse in die Raumluft ausströmt.
Wegen der Zufallsstreuung der Zeitmesswerte sind zur genauen Bestimmung von Mittelwert und Standardabweichung zahlreiche Wiederholungsmessungen erforderlich. Zusätzlich zu üblichen Abschätzung der Messunsicherheit soll hier die statistische Verteilung dieser vielen Messwerte untersucht werden.

2 Physikalische Grundlagen: Gasdichte und Ausströmgeschwindigkeit

Das Gas befindet sich in einem Behälter mit geringem Überdruck, der durch Wasser in einem verbundenen äußeren Gefäß erzeugt wird (Abb. 1). Dieser Überdruck Δp ist die Differenz zwischen dem Druck p_2 im inneren Gasbehälter und dem äußeren Luftdruck p_1 . Infolge des Überdrucks strömt das Gas mit der Geschwindigkeit v_1 aus der engen Düse (Querschnitt A_1) aus; im inneren Behälter (Querschnitt A_2) strömt dabei das Gas bzw. das nachdrückende Wasser mit der Geschwindigkeit v_2.

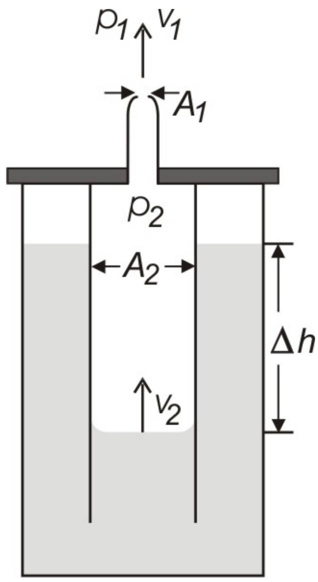


Abb. 1: Effusiometer

Die Gasströmung lässt sich durch die Bernoullische Gleichung beschreiben, die hier (kleine Dichten) lautet:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \tag{1}$$

Außerdem gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{dV}{dt} = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \tag{2}$$

Bei der Anordnung ist $A_2 >> A_1$, folglich ist $v_2 << v_1$ und damit

$$v_1^2 - v_2^2 \approx v_1^2 \tag{3}$$

Die Bernoullische Gleichung lässt sich daher vereinfachen zu:

$$v_1^2 = \frac{2 \cdot \Delta p}{\rho} \tag{4}$$

Nun ist die Ausströmgeschwindigkeit aus der Düse nicht einfach messbar, und außerdem nehmen v und Δp beim Ausströmvorgang stetig ab. Deshalb geht man durch Kombination von Gl. 2 und Gl. 3 über zum Volumenstrom:

$$\frac{dV}{dt} = A_1\sqrt{\frac{2\cdot\Delta p}{\rho}} \quad \text{bzw.} \quad V = A_1\cdot t\sqrt{\frac{2\cdot\Delta p}{\rho}} \tag{5}$$

und misst unter sonst gleichen Bedingungen die Ausströmzeiten t_G für das Gas und t_L für Luft für gleiche Volumen $V_G = V_L$. Das Verhältnis der Gasdichte ergibt sich damit aus dem Verhältnis der Ausströmzeiten:

$$\frac{\rho_G}{\rho_L} = \left(\frac{t_G}{t_L}\right)^2 \tag{6}$$

Gemessen wird das Dichteverhältnis bei Laborbedingungen. Gesucht ist die Dichte ρ_n des Gases bei Normalbedingungen, denn für diesen Zustand sind die Tabellenwerte angegeben.

Zur Umrechnung wird die Gasgleichung

$$p\cdot V = m\cdot R\cdot T \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{m}{V} \tag{7}$$

kombiniert und umgestellt zu

$$\frac{p}{\rho\cdot T} = \frac{p_n}{\rho_n\cdot T_n} = R = konst. \quad \text{bzw.} \quad \frac{\rho}{\rho_\mathrm{n}} = \frac{p}{p_n}\cdot\frac{T_n}{T} \tag{8}$$

Da die Messungen für beide Gase (z.B. Ar und Luft) bei gleichen, konstanten Werten von p und T gemacht werden, wären für beide Gasdichten dieselben Umrechnungen vorzunehmen. Das Dichteverhältnis ist deshalb von den Messbedingungen unabhängig:

$$\frac{\rho_G}{\rho_L} = \frac{\rho_{G,n}}{\rho_{L,n}}$$

Luftdichte im Normalzustand: $\rho_{L,n}$= 1,293 kg/m^3

(T_n = 273 K bzw. ϑ_n = 0°C , p_n = 1013 hPa)

Die Gasdichten im Normalzustand von Ar und CO_2 finden Sie in Ihrem Tabellenbuch; Sie können aber diese Dichten auch selbst berechnen aus Molmasse und Molvolumen für das ideale Gas im Normalzustand.

3 Stömungsform in der Düse

Eine Strömung ist entweder laminar oder turbulent. Eine Kennzahl, aus der sich der Strömungszustand ermitteln lässt, ist die dimensionslose Reynolds-Zahl:

$$\mathrm{Re} = \frac{v\cdot l\cdot\rho}{\eta} \tag{9}$$

v Geschwindigkeit des strömenden Mediums
ρ Dichte des strömenden Mediums
η dynamische Voskosität des strömenden Mediums
l charakteristische Länge, hier Rohr- bzw Düsendurchmesser

Für Re ≤ 2300 ist eine Rohrströmung laminar, bei größeren Reynoldszahlen schlägt sie in die turbulente Form um.

Der Strömungszustand in der Düse soll durch Bestimmung der Reynolds-Zahl ermittelt werden. Dazu braucht man die Strömungsgeschwindigkeit v, die mit Gl. 4 aus dem Überdruck Δp bestimmt werden kann.

Nun ändern sich Überdruck und Strömungsgeschwindigkeit während einer Messung. Aus der Differenz der Wasserstände Δh im Gefäß bei Start (untere Marke) und Ende (obere Marke), sowie der Dichte ρ von Wasser bestimmt man die Überdrucke nach

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h \,, \qquad (10)$$

daraus die beiden Geschwindigkeiten und schließlich die beiden Reynolds-Zahlen. Damit kann auch geprüft werden, ob sich der Strömungszustand im Laufe einer Messung verändert.

- Die Bestimmung der beiden Reynolds-Zahlen ist bei beiden Düsen für Luft durchzuführen.

  Dynamische Viskosität der Luft (bei 20°C): $\eta = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$ Pa·s

4 Versuchsdurchführung

Gasentnahme: Das Gas strömt, solange der Taster des jeweiligen Gases betätigt ist. Zunächst lässt man das Gas einige Male ein- und ausströmen (ohne Zeitmessung). Durch dieses Spülen soll die Luft bzw. das Gas vollständig aus dem Rohr entfernt werden

1. An der Ausströmöffnung ist die Düse mit 1 mm Bohrung aufzustecken. Zum Messen schließt man das Ausströmventil und lässt die Luft bis unterhalb der unteren Markierung ins Rohr strömen. Von dort aus lässt man das Wasser aufsteigen, indem man das Zufuhrventil schließt und das Ausströmventil öffnet.
   Während des Aufsteigens stoppt man das Zeitintervall ab, in dem der Wasserspiegel von der unteren zur oberen Markierung steigt, wenn die Luft aus der Düse ausströmt. Diese Messung ist mindestens **30 mal** auszuführen. An jeder Messreihe dieser Zeitmessungen sollen sich alle Teilnehmer am Versuch beteiligen. Achten Sie darauf, dass das Ventil vor der Düse **voll** geöffnet ist. Die engste Stelle muss die Düse sein.

2. Setzen Sie die Düse mit 0,5 mm Bohrung auf. Messen Sie die Ausströmzeiten für Luft mindestens **6 mal**.

3. Messen Sie nun die Ausströmzeiten für die beiden Gase mit der 1 mm-Düse, entsprechend wie bei Luft.

4. Zur Bestimmung der Reynolds-Zahl sind die maximale und die minimale Wasserstandsdifferenz im Gefäß und daraus die entsprechenden Überdrucke (in Pa) zu ermitteln.

Notieren Sie die Messunsicherheiten der Messgeräte für eine spätere Auswertung (gegebenenfalls ihre Schätzwerte).

5 Auswertung der Dichtebestimmung

5.1 Für die vier Messreihen der Ausströmzeiten werden die jeweiligen arithmetischen Mittelwerte

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i \qquad \text{und die Standardabweichungen} \qquad (11)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2} \qquad \text{berechnet. Mittelwert und Standardabweichung haben die gleiche Einheit.}$$

(12)

Die üblichen wissenschaftlichen Taschenrechner sind für diese Berechnungen mit den erforderlichen statistischen Funktionen ausgestattet. Suchen Sie die Gebrauchsanweisung für Ihren Taschenrechner und machen Sie sich mit der Anwendung dieser nicht unwichtigen Funktionen vertraut. Sie können aber auch die Auswertung mit Ihrem Programm auf dem PC vornehmen.
In jedem Fall müssen Sie darauf achten, dass die von Ihnen vorgelegte Arbeit vollständig und prüffähig ist, d.h. dass der fachkundige Leser den Zusammenhang zwischen den gemessenen Daten und den Ergebnissen nachvollziehen kann.

5.2 Anzugeben als Ergebnis für jede Messreihe sind die Mittelwerte und die Standardabweichungen $\bar{t} \pm s$.

5.3 Für die beiden Düsengrößen sind die Dichteverhältnisse und daraus die Gasdichte ρ_G (im Normalzustand) zu bestimmen. Die Unsicherheit für die Werte für ρ_G ist nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz zu bestimmen; der Normalwert ρ_L ist dabei als richtig anzusehen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für die Gasdichte mit einem Präzisionswert aus einem Tabellen- oder Lehrbuch. Prüfen Sie ob eine etwaige Abweichung innerhalb der Messunsicherheit liegt.

5.4 Ermitteln Sie die Strömungsgeschwindigkeiten und die Reynolds-Zahlen für die Luftströmung durch die beiden Düsen. Welcher Strömungszustand tritt jeweils auf? Für diese orientierende Untersuchung ist keine Abschätzung der Messunsicherheit erforderlich.

6 Messwertschwankungen und Häufigkeitsverteilung

Für die Messreihen der Ausströmzeiten (mit Düse 1 mm) sollen die Häufigkeitsverteilungen der Messwerte bestimmt und graphisch als Histogramme und als Häufigkeitssummen dargestellt werden. Diese Darstellungen geben in übersichtlicher Weise eine gute Information über die Messwertverteilung in der Messreihe.

6.1 Einteilung der Messwerte in Klassen

Die im Messprotokoll (in der Statistik als "Urliste" bezeichnet) notierten n Messwerte einer Messreihe werden der Größe nach geordnet, und zwar unter Berücksichtigung der Messunsicherheit. Das gesamte Messintervall, vom kleinsten bis zum größten Messwert, wird in k Teilintervalle, sogenannte Klassen mit jeweils gleicher Breite w eingeteilt. Die sinnvolle Klassenbreite hängt von der Standardabweichung s ab, sie sollte zu $w < 0{,}6 \cdot w$ gewählt werden. Danach sind bei diesem Versuch in der Regel mindestens 6 Klassen zu bilden. Stets sollten die Klassengrenzen bei "runden" Zahlen liegen.

<u>In einer Tabelle sind für die *k* Klassen folgende Daten aufzulisten:</u>

1. Klassen-Nr. j (j = 1...k)

2. Klassengrenzen

3. Besetzungszahlen n_j (absolute Häufigkeiten) der Klasse j

4. relative Häufigkeiten: $h_j = n_j/n$

5. Summenhäufigkeit (aufsummierte relat. Häufigkeiten) $H_j = n_1 + n_2 + ...n_j$; (in der letzten Klasse ist H = n, d.h. gleich der Summe aller Messwerte der Messreihe)

(vgl. Beispiel - Bild 1 im Anhang)

6.2 Histogramm (Balkendiagramm) der Häufigkeitsverteilung

Auf Millimeterpapier wird die Abszissenachse (Koordinate Zeit) entsprechend der gewählten Klasseneinteilung in *k* gleichbreite Streifen mit der Klassenbreite *w* unterteilt. Auf der Ordinatenachse wird die Besetzungszahl *n* der Messwerte für die jeweilige Klasse balkenförmig aufgetragen. Es entstehen Rechtecke mit der Breite *w* und den Höhen *n*. In dieses Diagramm sind zusätzlich der Mittelwert $\bar{t}$ und der Bereich der Standardabweichung ± *s* einzuzeichnen.

6.3 Häufigkeitssumme

Wie beim Histogramm wird die Abszissenachse in *k* Streifen für die Klassen eingeteilt. Auf der Ordinate werden die aufsummierten relativen Häufigkeiten bzw. Summenhäufigkeiten *H* für die jeweilige Klasse an der oberen Klassengrenze aufgetragen. Der Mittelwert liegt bei der Summenhäufigkeit 50%; am oberen Ende der letzten Klasse ist 100% erreicht.
Die eingetragenen Punkte werden durch Geradenstücke verbunden.

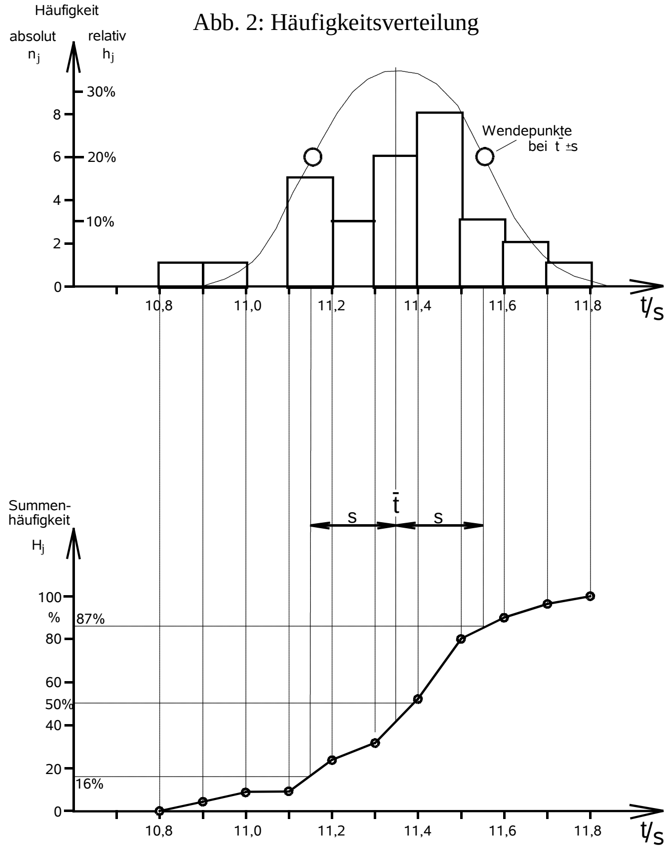


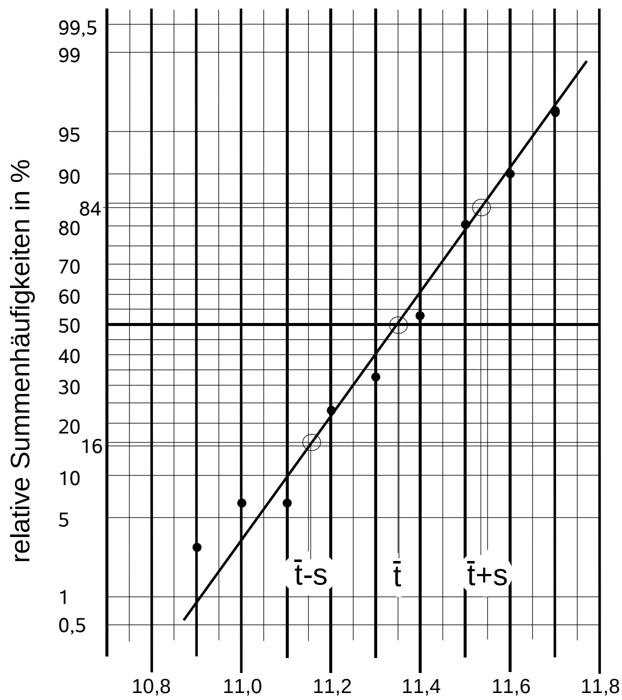
Abb. 2: Häufigkeitsverteilung

Abb. 3: Häufigkeitssumme

6.4 Häufigkeitssumme im Wahrscheinlichkeitsnetz

Dieselben Daten wie bei 3. werden auf ein Funktionspapier mit dem sogenannten Wahrscheinlichkeits- oder Summenhäufigkeitsnetz aufgetragen. Die Ordinate dieses Funktionsnetzes ist nichtlinear (vgl. Abschnitt 7). Sie finden einen kopierfähigen Abdruck dieses Netzes am Ende dieser Anleitung.

Abb. 4: Wahrscheinlichkeitsnetz



7 Normalverteilung

Wenn bei einem Versuch nur zufällige Abweichungen der Messwerte vom "wahren" Wert auftreten und sehr viele ($n \rightarrow \infty$) gleichwertige Messungen ausgeführt werden, dann wird ihre Häufigkeitsverteilung beschrieben durch die Gaußsche Normalverteilung. Dabei wird aus dem Histogramm eine glatte Glockenkurve.
Das Maximum der Glockenkurve liegt beim Erwartungswert, das ist hier der Mittelwert; der Abstand zwischen Maximum und den Wendepunkten der Kurve ist gleich der Standardabweichung.
Die Gaußsche Normalverteilung lautet:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad \text{mit} \quad y = \frac{t - \bar{t}}{s} \qquad y = \frac{\text{Zufallsvariable - Erwartungswert}}{\text{Standardabweichung}} \tag{14}$$

Bei Normalverteilung liegen in dem Bereich Mittelwert ± Standardabweichung gerade 68% aller Messwerte.

Das Integral über die Gaußsche Glockenkurve, das Fehlerintegral $\Phi(y)$, entspricht dem Verlauf der Summenhäufigkeit für $n \rightarrow \infty$, es zeigt eine symmetrische s-förmige Kurve.

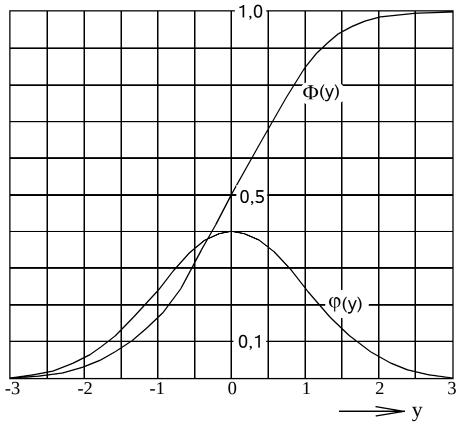


Abb. 5:
Normalverteilung $\varphi(y)$ und Verteilungsfunktion $\Phi(y)$

Durch eine spezielle Ordinatenteilung lässt sich diese Kurve zu einer Geraden verstrecken, man erhält dabei das Wahrscheinlichkeitsnetz. Es ist als Wahrscheinlichkeits- oder Summenhäufigkeitspapier im Handel.
In einfacher Weise lässt sich mit dem Wahrscheinlichkeitsnetz eine Häufigkeitsverteilung auf Normalverteilung untersuchen. Man trägt die relativen Summenhäufigkeiten der Klassen ein, und zeichnet zu den Punkten eine Ausgleichsgerade. Bei Normalverteilung liegen die Punkte auf der Geraden. Der Mittelwert liegt bei der Summenhäufigkeit 50%. Je flacher die Gerade, desto größer ist die Messwertstreuung:

> Aus dem Intervall zwischen den Summenhäufigkeiten 16% und 84% (darin sind 68% aller Messwerte) ergibt sich unmittelbar die doppelte Standardabweichung.

Zum Vergleich des Histogramms mit der Normalverteilungskurve müssten für den jeweiligen Mittelwert und die Standardabweichung nach Gl. 14 die Funktionswerte von $\varphi(y)$ für die Werte von t an den Klassengrenzen berechnet werden. Hier genügt es, wenn als Annäherung an die Gaußsche Normalverteilungskurve zum Histogramm eine symmetrische Glockenkurve mit Maximum beim Mittelwert, und Wendepunkten bei Standardabweichung skizziert wird.

7.1 Aufgabe

- Vergleichen Sie das Histogramm mit der Glockenkurve auf Symmetrie und Breite. Schätzen Sie damit ab, inwieweit eine Normalverteilung vorliegt.

- Vergleichen Sie im Wahrscheinlichkeitsnetz die Lage der Punkte mit der Ausgleichsgerade, bestimmen Sie daraus ebenfalls Mittelwert und Standardabweichung.

8 Ergebnisse

Folgende Ergebnisse sind anzugeben:

- Ausströmzeiten für Luft und die beiden Gase: Mittelwerte und Standardabweichungen;
- dazu die Häufigkeitsverteilungen (Histogramme) und Summenhäufigkeitsverteilungen.
- Dichteverhältnisse der Gase, bezogen auf Luft.
- Gasdichten im Normalzustand:
  - Versuchsergebnis und Tabellenwert,
  - Vergleich der Abweichungen mit den Messungenauigkeiten.

Anhang:

Tabelle 1: Zahlenbeispiel

Messprotokoll (Urliste)

t in s

11,66
11,54
11,15
11,49
11,36
10,94
11,41
11,71
11,38
11,42
11,14
11,35
...
(30 Messwerte)

Mittelwert $\bar{t}$ = 11,3573...s
Standardabweichung s = 0,201...s

Ergebnis t = (11,36 ± 0,2)s
t = 11,36 s ± 1,8%

kleinster Messwert 10,86
größter Messwert 11,71

Klassenbreite W < 0,6 s = 0,1208
gewählt: W = 0,10 s

Klasse j	Klassengrenzen	absol. Häufigkeit (Besetzungszahl) n_j	rel. Häufigkeit h_j in %	Summen-häufigkeit H_j in %
1	10,80..10,89	I 1	3,3	3,3
2	10,90..10,99	I 1	3,3	6,6
3	11,00..11,01	0	0	6,6
4	11,10..11,19	IIII 5	16,7	23,3
5	11,20..11,29	III 3	10,0	33,3
6	11,30..11,39	IIII I 6	20,0	53,3
7	11,40..11,49	IIII III 8	26,7	80,0
8	11,50..11,59	III 3	10,0	90,0
9	11,60..11,69	II 2	6,7	96,7
10	11,70..11,79	I 1	3,3	100,0
		Σ = 30	Σ = 100,0	

Dazu kommen:
- Häufigkeits- und Summenhäufigkeitsverteilung (Histogramm und s-Kurve)
- Wahrscheinlichkeitsnetz mit Gerade
- Wahrscheinlichkeitsnetz als Formularblatt

Wahrscheinlichkeitsnetz